SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

F. NARDINI

ESISTENZA DI POLI DI RISONANZE PER ALCUNI OPERATORI AUTOAGGIUNTI

24 GIUGNO - 1 LUGLIO 1982

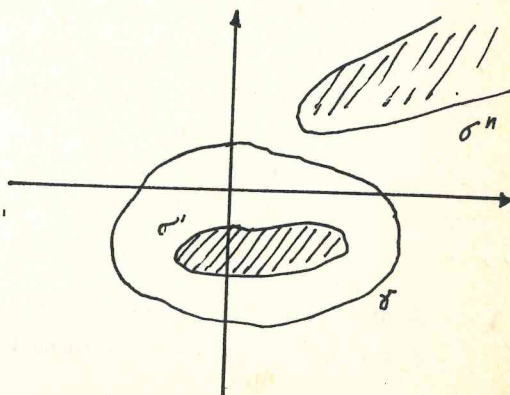
INTRODUZIONE

In questo seminario affronteremo il problema dell'esistenza di poli di risonanza per alcuni operatori autoaggiunti in $L^2(R^3)$ che sono operatori di Hamilton di altrettanti sistemi meccanici quantistici.

Per introdurre il concetto di polo di risonanza richiamiamo brevemente alcuni noti fatti di analisi spettrale. Sia H uno spazio di Hilbert e $D \subseteq C$; sia $H(\beta)$ una funzione definita in D e a valori operatori chiusi in H. $H(\beta)$ si dice *famiglia (di operatori) continua in senso generalizzato (o del gap)* se sono soddisfatte le due seguenti condizioni [13: ch IV § 2.6.]

I) $\rho(H(\beta_o)) \neq \emptyset$, $\quad \forall \beta_o \in D$

II) $\forall \beta_o \in D \quad \forall \lambda_o \in \rho(H(\beta_o)) \quad \exists V$ intorno di β_o in D tale che $\lambda_o \in \rho(H(\beta)) \quad \forall \beta \in V$ e la funzione $\beta \to (H(\beta) - \lambda_o)^{-1}$ è continua (in $L(H)$).

In tal caso se γ è una curva continua semplice e chiusa che separa lo spettro di $H(\beta_o)$ (cioè $\sigma(H(\beta_o)) = \sigma'(H(\beta_o)) \cup \sigma''(H(\beta_o))$ e $\sigma'(H(\beta_o))$ è contenuto nella componente connessa limitata di $C-\gamma$ mentre $\sigma''(H(\beta_o))$ è contenuto nella componente connessa non limitata di $C-\gamma$), allora esiste un intorno V' di β_o in D tale che γ separa $\sigma(H(\beta))$ $\forall \beta \in V'$ [13: ch IV th. 3.16]; in particolare se $\sigma'(H(\beta_o)) = \{\lambda_o\}$ e λ_o è un autovalore isolato di molteplicità

finita m di $H(\beta_o)$, allora $H(\beta)$ ha esattamente m autovalori (contando la molteplicità) nella componente connessa limitata di $C-\gamma$ $\forall \beta \in V'$, inoltre tali autovalori tendono a λ_o per $\beta \to \beta_o$ [13: ch IV § 3.5]. Questo risultato garantisce fra l'altro che $\sigma(H(\beta))$ non può espandersi improvvisamente al variare di β.

La famiglia $H(\beta)$ si dice *olomorfa nel senso di Kato* se soddisfa alla I) ed alla

II)' $\forall \beta_o \in D$ $\forall \lambda_o \in \rho(H(\beta_o))$ $\exists V$ intorno di β_o in D tale che $\lambda_o \in \rho(H(\beta))$ $\forall \beta \in V$ e la funzione $\beta \to (H(\beta) - \lambda_o)^{-1}$ è una funzione olomorfa in V a valori nello spazio di Banach $L(H)$ [13: ch VII § 1.1, 1.2].

In questa ipotesi continuano a valere tutti i risultati precedenti e inoltre se $\sigma'(H(\beta_o))$ è un sistema finito di autovalori (cioè $\sigma'(H(\beta_o))$ è costituito solamente da un numero finito di autovalori isolati e di molteplicità finita [13: ch III § 6.5]), allora l'intorno V' può essere scelto in modo tale che $\sigma'(H(\beta))$ sia costituito dai valori che assumono in β le determinazioni di una o più funzioni analitiche in V' con al più ivi punti di diramazione algebrici [13: ch VII th. 1.8].

Esaminiamo ora brevemente un tipo di regolarità più debole. Sia $H(\beta)$ una funzione definita nel dominio D e a valori operatori chiusi in H e sia $\beta_o \in D$ un punto di accumulazione di D; si dice che $H(\beta)$ *converge ad* $H(\beta_o)$ *(oppure è continua in* β_o*) in senso forte generalizzato* se sono soddisfatte le seguenti condizioni [13: ch VIII § 1.1]:

I) $\rho(H(\beta_o)) \neq \phi$

II) $\exists \lambda_o \in \rho(H(\beta_o))$ ed un intorno V di β_o in D tale che
$$\lambda_o \in \rho(H(\beta)) \quad \forall \beta \in V \text{ e } (\lambda_o - H(\beta))^{-1} \xrightarrow[\beta \to \beta_o]{s.} (\lambda_o - H(\beta_o))^{-1}$$

Si dice *regione di limitatezza*, e si indica con Δ_b, l'insieme dei punti $\lambda_o \in C$ tali che esiste un intorno V di β_o in D ed una costante $M > 0$ ta-

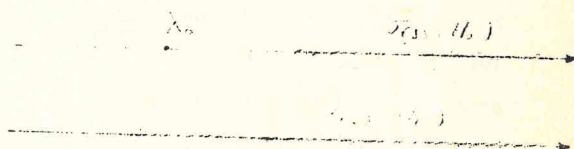
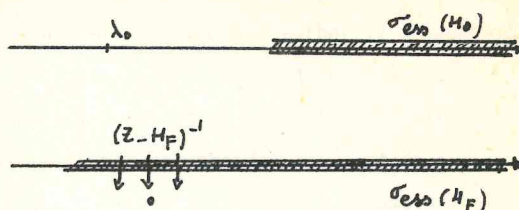
li che $\| (\lambda_\circ - H(\beta))^{-1} \| < M \quad \forall \beta \in V$; si dice *regione di convergenza forte*, e si indica con Δ_s, l'insieme dei punti $\lambda_\circ \in C$ che soddisfano II); si può provare che [13: ch VIII, th 1.3] $\Delta_s = \Delta_b \cap \rho(H(\beta_\circ))$. In queste ipotesi il teorema di stabilità della separazione dello spettro non vale più; lo spettro può espandersi improvvisamente ed in particolare un autovalore isolato di molteplicità finita di $H(\beta_\circ)$ può "essere assorbito" dallo spettro essenziale di $H(\beta)$ non appena $\beta \neq \beta_\circ$ [13: ch VIII § 1.3]. Se ciò non avviene si può dare la seguente *definizione di autovalore stabile*. Un autovalore isolato di molteplicità finita $\lambda_\circ$ di $H(\beta_\circ)$ si dice stabile per la famiglia $H(\beta)$ $\beta \in D$ se sono soddisfatte le due seguenti condizioni [13: ch VIII § 1.4]

I) $\exists \delta > 0$ tale che $\{\zeta \in C;\ 0 < |\zeta - \lambda_\circ| < \delta\} \subseteq \Delta_s$

II) se $P(\beta) = + (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda_\circ| = r} (z - H(\beta))^{-1} \, dz \quad (r < \delta)$

allora $P(\beta) \xrightarrow[\beta \to \beta_\circ]{\| - \|} P(\beta_\circ)$.

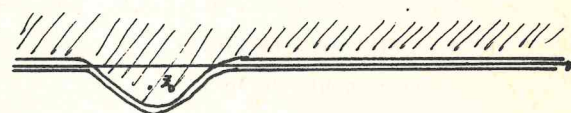
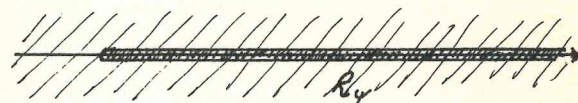
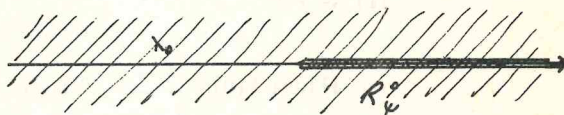
Per illustrare il caso in cui l'autovalore non è stabile, supponiamo che H_0 sia un operatore autoaggiunto in H e W un operatore simmetrico in H tale che $H_F = H_0 + FW$ sia autoaggiunto $\forall F > 0$; sotto ipotesi molto generali su W [13: ch VII th 1.5] si ha che H_F tende ad H_0 in senso forte generalizzato per $F \to 0$. Supponiamo che $\lambda_\circ$ sia un autovalore isolato di molteplicità finita di H_0 ed un punto dello spettro essenziale di H_F $\forall F > 0$. In tali ipotesi si può provare che [16: th. VII.23] la misura spettrale di H_F si concentra in $\lambda_\circ$ quando $F \to 0$. Tuttavia la concentrazione della misura spet-

trale non è l'unico "ricordo" che H_F conserva dell'autovalore di H_o, ma il risolvente di H_F presenta una "singolarità vicino a λ_o" se viene opportunamente prolungato dal semipiano Im $z > 0$ attraverso l'asse reale. Precisiamo quest'ultima affermazione dando la [16: ch XII § 6].

Definizione di polo di risonanza

Usiamo le notazioni or ora introdotte e supponiamo che esista un insieme $\mathcal{D}$ denso in H tale che per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ le due funzioni analitiche

$R_\psi(z) = \langle \psi, (H_F - z)^{-1} \psi \rangle$

$R^\circ_\psi(z) = \langle \psi, (H_o - z)^{-1} \psi \rangle$,

definite per Im $z > 0$ ammettano un prolungamento analitico attraverso l'asse reale; un punto $z_o \in C$ con Im $z_o < 0$ tale che R°_ψ sia olomorfa in z_o per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ ed R_ψ abbia ivi un polo per qualche $\psi \in \mathcal{D}$ dicesi (polo di) risonanza per H_F ed il numero - Im z dicesi ampiezza della risonanza.

N.B. Si osservi che nel caso in esame la funzione R°_ψ è definita ed olomorfa in tutto un intorno di λ_o escluso al più λ_o ed in tutto il semipiano Im$z < 0$; occorrerà dunque esaminare solamente la funzione R_ψ che a priori può non essere definita in nessun punto dell'asse reale. La definizione precedente è data in forma sufficientemente generale per poter considerare anche casi in cui l'autovalore λ_o non è isolato.

Ebbene in molti casi si può dimostrare che vicino ad un autovalore isolato e di molteplicità finita m di H_o si trovano esattamente m poli di risonanza di H_F almeno per F vicino a zero.

Lo studio successivo delle risonanze si articolerà in tre tappe [1, 2, 3, 6, 7, 11 e per un esposizione riassuntiva v. anche 12 e 16 ch XIII § 10]:

I) Si introduce una famiglia olomorfa di operatori non autoaggiunti ottenuta dall'operatore H_F per "dilatazione" e di questa si cercano gli autovalori isolati.

II) Si prova che tali autovalori coincidono con i poli di risonanza dell'operatore H_F secondo la definizione precedente.

III) Si prova infine che i medesimi autovalori tendono agli autovalori di H_o quando $F \to 0$; cioè i poli di risonanza di H_F sono "vicini" ai livelli energetici di H_o.

Nel seguito considereremo due casi: il primo trattato in [2,6,11] nel quale $H_o = - \Delta - \frac{z}{r}$ e $W = x_1$: H_o risulta essere l'Hamiltoniano di un elettrone attratto da un nucleo di massa infinita posto nell'origine (atomo d'idrogeno), mentre introducendo la perturbazione W si ottiene l'Hamiltoniano dello stesso sistema posto in un campo elettrico uniforme di intensità (proporzionale a) F e con direzione parallela all'asse x_1 (effetto Stark). Il secondo in cui $H_o = \sqrt{1 - \Delta} - \frac{z}{r}$ e $W = x_1$ trattato in [13] che fisicamente non è altro che il sistema precedente trattato nel caso relativistico.

Introduciamo alcune notazioni su cui generalmente non c'è concordia. Se A è un operatore chiuso nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ indichiamo con $\sigma(A)$ lo spettro di A, con $\sigma_p(A)$ l'insieme degli autovalori isolati di

molteplicità finita di A, con $\sigma_{ess}(A)$ l'insieme $\sigma(A) - \sigma_p(A)$ ed infine con $\sigma_w(A)$ l'insieme dei numeri $\lambda \in C$ tali che esista una *successione caratteristica* per $A - \lambda$: una successione cioè tale che $u_n \in D(A)$ e $\|u_n\| = 1$, $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{w} 0$ e $\|(A - \lambda)u_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Ricordiamo le seguenti proprietà di $\sigma_w(A)$ [17]:

I) $\sigma_w(A)$ è chiuso

II) $\sigma_w(A) \subseteq \sigma_{ess}(A)$

III) $Fr(\sigma_{ess}(A)) \subseteq \sigma_w(A)$.

I. RISONANZE DELL'OPERATORE $-\Delta + Fx_1 - \frac{z}{r}$

Esponendo i risultati ottenuti in [11] nel caso non relativistico ci soffermeremo sulle tecniche utilizzabili anche nel caso relativistico mentre ci limiteremo ad enunciare i risultati ottenuti sfruttando le particolari proprietà dell'operatore $-\Delta$.

Dal punto di vista matematico Avron ed Herbst [2] hanno notato che non conviene trattare Fx_1 come perturbazione di $-\Delta - \frac{z}{r}$ giacché tale perturbazione non è piccola in alcun senso qualunque sia F; conviene bensì considerare $-\frac{z}{r}$ come perturbazione di $-\Delta + Fx_1$. Consideriamo quindi in primo luogo le proprietà di quest'ultimo operatore.

Poniamo

$$h(\alpha) = -\Delta + \alpha x_1 \qquad D(h(\alpha)) = S(R^3) \qquad \alpha \in C.$$

Per $\alpha \in R$ si ha notoriamente il

Teorema I.1

Se $\alpha \in R$ $\alpha \neq 0$ si ha

a) $h(\alpha)$ è essenzialmente autoaggiunto

b) $\sigma(\bar{h}(\alpha)) = R$ ($\bar{h}(\alpha)$ indica la chiusura di $h(\alpha)$).

Per $\alpha \in C$ si ha il seguente

Teorema I.2

Se $\alpha \in C$ $\text{Im}\, \alpha \neq 0$ si ha

a) $h(\alpha)$ ha range numerico $W(h(\alpha))$ contenuto nel semipiano $S_\alpha = \{z \in C;\ \text{Re}\, z > \frac{\text{Re}\, \alpha}{\text{Im}\, \alpha} \text{Im}\, z\}$; in particolare è chidibile

b) $\sigma(\bar{h}(\alpha)) = \emptyset$

c) $\bar{h}(\alpha)^* = \bar{h}(\bar{\alpha})$

d) $D(\bar{h}(\alpha)) = D(-\Delta) \cap D(x_1)$

Commento e traccia della dimostrazione. Osserviamo che evidentemente

$$W(h(\alpha)) \subseteq W(-\Delta) + W(\alpha x_1) = R^+ + \{\alpha t;\ t \in R\} = S_\alpha;$$

dunque $h(\alpha)$ è un operatore settoriale e quindi chiudibile [13: ch V th 3.4]: questo prova a). La prova di b) e c) è ottenuta calcolando esplicitamente il semigruppo $e^{-ith(\alpha)}$ mediante un procedimento di "separazione delle variabili" non applicabile al caso $\sqrt{1 - \Delta}$. La prova di d) si ottiene dimostrando che esistono tre costanti a, b, c > 0 tali che

$$(1) \qquad \|h(\alpha)u\|^2 \geq a\, \|\Delta u\|^2 + b\, \|x_1 u\| - c\, \|u\|^2 \qquad \forall u \in S(R^3)$$

Infatti:

$$\|h(\alpha)u\|^2 = \|\Delta u\|^2 + |\alpha|^2 \|x_1 u\|^2 + \langle (\Delta \alpha x_1 + \bar{\alpha} x_1 \Delta)u, u \rangle =$$

$$= \|\Delta u\|^2 + |\alpha|^2 \|x_1 u\|^2 + \text{Re}\, \alpha \langle (\Delta x_1 + x_1 \Delta)u, u \rangle + \text{Im}\, \alpha \langle [\Delta, x_1]\, u, u \rangle$$

ma $\langle (x_1 \Delta + \Delta x_1)u, u \rangle \leqslant \frac{1}{|\alpha|} \|\Delta u\|^2 + |\alpha|\, \|x_1 u\|^2$ mentre $[\Delta, x_1] = 2 \frac{\partial}{\partial x_1}$

onde $\| h(\alpha)u \|^2 \geqslant (1 - \frac{|\mathrm{Re}\ \alpha|}{|\alpha|}) \| \Delta u \|^2 + |\alpha|^2 (1 - \frac{|\mathrm{Re}\ \alpha|}{|\alpha|}) \| x_1 u \|^2 +$

$$+ 2\ \mathrm{Im}\ \alpha < \frac{\partial}{\partial x_1} \psi, \psi >$$

Per ottenere la (1) è sufficiente minorare l'ultimo addendo col teorema di Ehrling e Nieremberg.

Osserviamo espressamente che la famiglia di operatori $\overline{h}(\alpha)$ $\mathrm{Im}\ \alpha > 0$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato [13: ch VII § 2.1], tuttavia ciò non è più vero per $\mathrm{Im}\ \alpha = 0$ giacché viene a mancare la condizione di costanza del dominio.

Siamo ora in grado di introdurre la perturbazione $- \frac{z}{r}$; osserviamo anzitutto che l'operatore di moltiplicazione per $- \frac{z}{r}$ è relativamente compatto rispetto a $- \Delta$ [13: ch IV § 1.3].

Introduciamo in $L^2(R^3)$ il gruppo, che chiameremo di dilatazione, definito da

$$(U(\theta)f)(x) = e^{3\theta/2} f(e^{\theta}x) \qquad \theta \in R \qquad f \in L^2(R^3).$$

Consideriamo poi i seguenti operatori, il secondo dei quali è quello che ci consentirà di compiere la prima tappa delle tre in cui abbiamo suddiviso lo studio delle risonanze:

$$H_0(F,\theta) = U(\theta)\ (- \Delta + Fx_1)\ U(\theta)^{-1} = - e^{-2\theta} \Delta + Fe^{\theta}x_1$$

$$H(F,\theta) = H_0(F,\theta) - U(\theta) \frac{z}{r} U(\theta)^{-1} = - e^{-2\theta} \Delta + Fe^{\theta}x_1 - \frac{e^{-\theta}z}{r} .$$

Evidentemente $H_0(F,\theta)$ ed $H(F,\theta)$ sono unitariamente equivalenti rispettivamente ad $H_0(F,0)$ ed $H(F,0)$ $\theta \in R$; è inoltre noto che $H(F,\theta)$ è essenzialmente autoaggiunto su $C_0^{\infty}(R^3)$ [15: ch X § 5].

In quanto segue supporremo $F > 0$ fissato ed osserviamo che la famiglia di operatori $H_0(F,\theta)$ definita per $\theta \in R$ ammette un prolungamento per $\theta \in C$ e che in virtù del teorema I.2 la famiglia $H_0(F,\theta)$ $\theta \in C$ $0 < \mathrm{Im}\ \theta < \frac{\pi}{2}$

$D(H_0(F,\theta)) = D(-\Delta) \cap D(x_1)$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato ed è costituita da operatori con spettro vuoto. Siamo ora in grado di considerare anche $H(F,\theta)$ con $\theta \in C$ e $0 < \operatorname{Im}\theta < \frac{\pi}{2}$; tale operatore ci permetterà di ottenere il prolungamento analitico che compare nella definizione di risonanza. Le osservazioni precedenti ci permettono di provare il seguente

Teorema I.3

La famiglia $H(F,\theta)$ $D(H(F,\theta)) = D(H_0(F,\theta))$, $\theta \in C$ $0 < \operatorname{Im}\theta < \frac{\pi}{2}$ è una famiglia olomorfa di tipo A nel senso di Kato ed è costituita da operatori chiusi con spettro discreto ed indipendente da θ inoltre la molteplicità di ciascun autovalore è indipendente da θ.

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia la prova si ottiene osservando che giacché $\frac{e^{-\theta}z}{r}$ è relativamente compatto rispetto a $-\Delta$ tale è anche rispetto ad $H_0(F,\theta)$ $\forall\,\theta \in C$ $0 < \operatorname{Im}\theta < \frac{\pi}{2}$ in virtù della (1) e quindi $H(F,\theta)$ è una famiglia olomorfa di operatori chiusi con spettro discreto [13: ch IV th. 1.11 e th 5.35].

Fissiamo ora θ_0 e supponiamo che λ sia un autovalore di $H(F,\theta_0)$ di molteplicità p, allora se θ è vicino a θ_0, $H(F,\theta)$ ha esattamente p autovalori (contando le eventuali molteplicità) vicino a λ ed essi sono dati dalle determinazioni di una o più funzioni analitiche $f_1(\theta),\ldots,f_h(\theta)$ con al più un punto di diramazione algebrico in θ_0 [13: ch VII th. 1.8]; d'altra parte se $\Phi \in R$ si ha

$$H(F,\theta_0 + \Phi) = U(\theta_0 + \Phi)\, H(F,0)\, U(\theta_0 + \Phi)^{-1} = U(\Phi)\, U(\theta_0)\, H(F,0)\, U(\theta_0)^{-1}\, U(\Phi)^{-1} =$$

$$= U(\Phi)\, H(F,\theta_0)\, U(\Phi)^{-1}.$$

Dunque $H(F,\theta_0 + \Phi)$ è unitariamente equivalente ad $H(F,\theta_0)$ $\forall\,\Phi \in R$ onde $f_i(\theta_0 + \Phi) = \lambda$ $\forall\Phi \in R$ e, per l'analiticità di f_i, questo significa che $f_i \equiv \lambda$ $i = 1,\ \ ,h$. Di qui l'indipendenza degli autovalori da θ (compresa la molteplicità).

La seconda tappa, ovvero il legame fra gli autovalori di $H(F,\theta)$ e le risonanze di $H(F,0)$, è dato dal seguente

Teorema I.4

Gli autovalori di $H(F,\theta)$ giacciono in $\{z \in C : \text{Im } z < 0\}$ e sono tutte e sole le risonanze di $H(F,0)$.

Dimostrazione. Riportiamo una dimostrazione semplificata in forza di alcune idee tratte da [5,6]. Consideriamo l'insieme $N = \{\psi \in L^2(R^3) :$ $: U(\theta)\psi$ si prolunga in una funzione olomorfa definita per $|\text{Im } \theta| < \frac{\pi}{2}\}$. Si può provare che N è denso in $L^2(R^3)$ [15: ch XIII § 10]; consideriamo pertanto la funzione

(2) $$f_\psi(z,\theta) = \langle U(\theta)\psi, (z - H(F\theta))^{-1} U(\theta)\psi \rangle.$$

Evidentemente la funzione $z \to f_\psi(z,\theta)$ è olomorfa in $C - \sigma(H(F,\theta))$ (e meromorfa in C); anche la funzione $\theta \to f_\psi(z,\theta)$ è olomorfa in $0 < \text{Im } \theta < \frac{\pi}{2}$, d'altra parte se $\Phi \in R$ $U(\Phi)$ è una trasformazione unitaria onde

$$f_\psi(z,\theta + \Phi) = \langle U(\Phi)\, U(\theta)\psi, U(\Phi)\, (z - H(F,\theta))^{-1}\, U(\Phi)^{-1}\, U(\Phi)\, U(\theta)\psi \rangle =$$
$$= f_\psi(z,\theta)$$

Dunque $f_\psi(z,\theta)$ è costante rispetto a θ.

Se ora avessimo provato che $H(F,\theta)$ tende ad $H(F,\text{Re } \theta)$ per $\text{Im}\,\theta \to 0$ in senso forte generalizzato [13: ch VIII § 1] evidentemente si avrebbe

$$f_\psi(z,\theta) = f_\psi(z, \text{Re } \theta) = \langle \psi, (z - H(F, 0))^{-1}\psi \rangle = R_\psi(z) \quad \forall z \in C$$

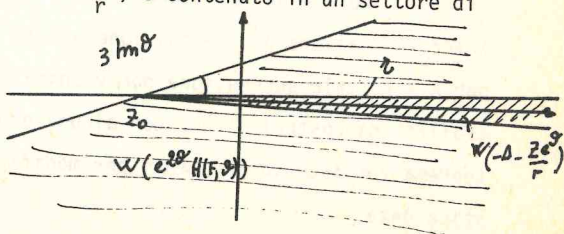
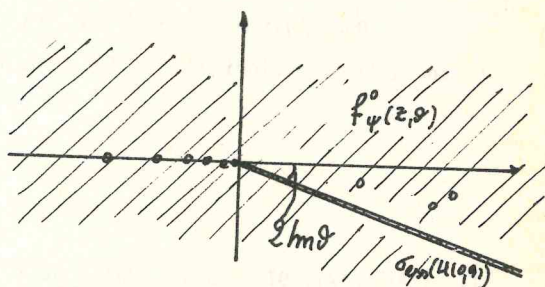
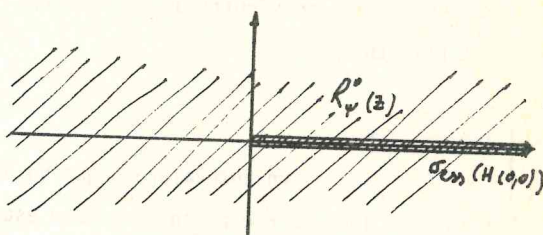
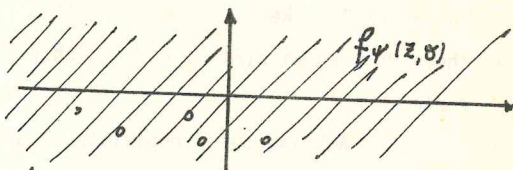
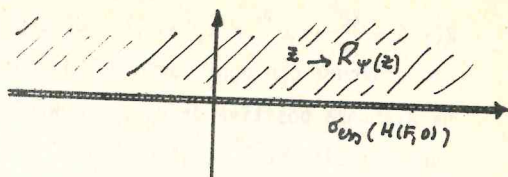
con $\text{Re } z < z_0$ $\text{Im } z < 0$. Per le proprietà di analiticità (rispetto a z) tale uguaglianza vale $\forall z \in C$ $\text{Im } z > 0$; questo prova che gli autovalori di $H(F,\theta)$ giacciono nel semipiano $\text{Im } z < 0$, mentre d'altra parte $f_\psi(z,\theta)$ fornisce il cercato prolungamento di R_ψ al semipiano $\text{Im } z < 0$ che ha po-

li in ciascun autovalore di $H(F,\theta)$ se ψ è opportuno. Poiché in modo analogo si può provare che $\forall z \in C$ $\text{Im } z > 0$ risulta

(3) $$R^\circ_\psi(z) = \langle \psi, (z - H(0,0))^{-1} \psi \rangle = \langle U(\theta)\psi, (z - H(0,\theta))^{-1} U(\theta)\psi \rangle = f^\circ_\psi(z,\theta)$$

e quest'ultima funzione è meromorfa in $C - \sigma_{ess}(H(0,\theta))$ $\forall\psi \in N$ ed ha poli in ciascun autovalore di $H(0,\theta)$ se ψ è opportuno, si ha subito che $z \to f^\circ_\psi(z,\theta)$ è olomorfa in tutto il settore $-2\,\text{Im}(\theta) > \arg z > -\pi$.

Proviamo infine che $H(F,\theta)$ tende ad $H(F,\theta_0)$ se $\theta_0 = \text{Re } \theta$ in senso forte generalizzato se $\text{Im } \theta \to 0$.

Poiché $-\frac{Z}{r}$ è relativamente compatto rispetto a $-\Delta$, fissati $\theta > 0$ ed $\eta > 0$ si può trovare $z_0 \in R$ tale che $W(-\Delta - \frac{Ze^\theta}{r})$ è contenuto in un settore di vertice z_0, semiasse $\{z \in C;\ \arg z = 0\}$ e semiampiezza η $\forall\, \theta \in C$ $0 < |\theta - \theta_0| < \delta$; se dunque $\eta < \text{Im } e^{3\theta}$ si ha

$W(-\Delta - \frac{Ze^{\theta}}{r} + e^{3\theta} F x_1) \subseteq \{z \in C;\ \arg(z - z_0) \in [-\pi + 3 \operatorname{Im}\theta, 3 \operatorname{Im}\theta]\}$.
Ciò assicura che ogni punto della regione $K - \{z \in C;\ \operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z < z_0\}$ ha distanza positiva da $\cup_{0<\operatorname{Im}\theta<\delta} W(e^{2\theta} H(F,\theta))$; se quindi z è uno di tali punti risulta $\| e^{-2\theta} (H(F,\theta) - z)^{-1} \| < 1/\operatorname{dist}(z, K)\ \forall\, \theta \in C\ 0 < \operatorname{Im}\theta < \delta$.
Poiché se $\theta_0 = \operatorname{Re}\theta$ $e^{2\theta} H(F,\theta)\, u \to e^{2\theta_0} H(F,\theta_0) u$ per $\operatorname{Im}\theta \to 0\ \forall\, u \in C_0^{\infty}(R^3)$ che è un core di $H(F,\theta)$, da [13: ch VIII th. 1.5] segue la convergenza forte.

Abbiamo così completato la seconda tappa; per quanto riguarda la terza riportiamo senza dimostrazione il seguente risultato di stabilità che si ottiene sfruttando la relativa compattezza di $\frac{1}{r}$ rispetto a $-\Delta$ [11: th III.3].

Teorema I.5

Sia λ_0 un autovalore negativo di $H(0, 0) = -\Delta - \frac{z}{r}$ di molteplicità j, allora se F è piccolo ci sono esattamente j autovalori di $H(F,\theta)$ ($\operatorname{Im}\theta > 0$) vicini a λ_0 che convergono a λ_0 per $F \to 0$.

Quest'ultimo teorema assicura che le risonanze di $H(F, 0)$ sono vicine agli autovalori di $H(0, 0)$ e che la loro ampiezza tende a zero quando $F \to 0$.

II. I RISULTATI DI ENSS HUNZIKER E VOCK

Se A è un operatore lineare chiuso nello spazio di Hilber *H* e $\lambda \in \sigma_W(A)$, allora per definizione esiste una successione caratteristica per $A - \lambda$; tale successione non è unica e ciò lascia in molti casi la possibilità di costruirne una con alcune proprietà prefissate. Il seguente teorema fornisce lo strumento per modificare una successione caratteristica data.

Teorema II.1 (di Enss) [5: cfr. anche 17]

Sia A un operatore chiuso nello spazio di Hilbert H con $\rho(A) \neq \emptyset$ e sia $(M_n)_{n\in N}$ una successione di operatori equilimitati su H con le seguenti proprietà

(i) Se $(u_m)_{m\in N}$ è una successione caratteristica per $A - \lambda$, allora esiste $a > 0$ tale che

$$\lim_{m\to\infty} \sup \| M_n u_m \| > a \qquad \forall n \in N$$

(ii) $M_n(D(A)) \subseteq D(A)$ e $[M_n, A]u = B_n u + K_n u$ essendo $K_n(z - A)^{-1}$ un operatore compatto e $\|B_n(z - A)^{-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per uno (e quindi tutti gli) $z \in \rho(A)$.

Allora se $(u_m)_{m\in N}$ è una successione caratteristica per $\lambda - A$ tale è anche $v_n = M_n u_{m(n)} / \|M_n u_{m(n)}\|$ se $m(n)$ è sufficientemente grande $\forall n \in N$.

Non proveremo questo teorema bensì un suo caso particolare in cui lo spazio $H = L^2(R^n)$, l'operatore A è del tipo $A = -\Delta + V$ con $V \in L^2_{loc}(R^n)$ tale che A sia chiuso e $C_0^\infty(R^n)$ sia un suo core.

Teorema II.2

Sia A un operatore del tipo descritto e supponiamo che esista $c > 0$ tale che

(4) $$\|(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u \| < c \|Au\| \qquad \forall u \in C_0^\infty(R^n).$$

Allora se $\lambda \in \sigma_w(A)$ si può costruire una successione caratteristica $(v_n)_{n\in N}$ in $C_0^\infty(R^n)$ per $A - \lambda$ tale che $v_n(x) = 0 \ \forall x \in S(n)$.

Dimostrazione. Se $\chi \in C_0^\infty(R^n)$ con $\chi(x) = 1 \ \forall x \in R^n \ |x| < 1$ poniamo $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$ e $M_n(x) = 1 - \chi_n(x)$. Poiché $C_0^\infty(R^n)$ è un core di A, se $\lambda \in \sigma_w(A)$ si può trovare una successione caratteristica $(u_m)_{m\in N}$ in $C_0^\infty(R^n)$ per $\lambda - A$: vogliamo provare che la successione $v_n = M_n u_{m(n)} / \|M_n u_{m(n)}\|$

è una successione caratteristica per $\lambda - A$ se $m(n)$ è sufficientemente grande $\forall n \in N$. Da (4) segue che la successione $(1-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_m$ è limitata mentre l'operatore $\chi_n(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ è compatto $\forall n \in N$ onde

$$\chi_n u_m = (\chi_n(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}})\,((1-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall n \in N$$

Dunque $\|M_n u_m\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$ $\forall n \in N$; se $m(n) \in N$ è tale che $\|M_n u_{m(n)}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ si ha

$$\|(A-\lambda)v_n\| = \|(A-\lambda)\frac{M_n u_{m(n)}}{\|M_n u_{m(n)}\|}\| =$$

$$= \frac{1}{\|M_n u_{m(n)}\|}(\|M_n(A-\lambda)u_{m(n)}\| + \|[M_n, A]\,u_{m(n)}\|)$$

Esaminiamo separatamente i due addendi

$$\|M_n(A-\lambda)u_{m(n)}\| \leqslant \|(A-\lambda)u_{m(n)}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\|[M_n, A]\,u_{m(n)}\| = \|-\frac{1}{n} < (\nabla\chi)(\frac{x}{n}), \nabla u_{m(n)} > -$$

$$-\frac{1}{n^2}(\Delta\chi)(\frac{x}{n})u_{m(n)}\| \leqslant \frac{1}{n}\sup|\nabla\chi|\,\|(1-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_{m(n)}\| +$$

$$+\frac{1}{n^2}\sup|\Delta\chi| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

giacché il fattore $\|(1-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_{m(n)}\|$ contenuto nel primo addendo è limitato uniformemente rispetto ad $n \in N$ in virtù di (4).

Osserviamo che il teorema precedente continua a valere se in luogo di $A = -\Delta + V$ si considera un operatore del tipo $A = \sqrt{1-\alpha\Delta} + V$ essendo $\alpha \in C -]-\infty, 0]$ $V \in L^2_{loc}(R^n)$ purché A soddisfi ancora le medesime ipotesi di detto teorema: in particolare cioè A è chiuso soddisfa (4) e $C_0^\infty(R^n)$ è un suo core. Per provare tale affermazione sarà sufficiente provare che anche in questo caso

$$\|[M_p, A]\,u_{m(p)}\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5}$$

A tal fine esprimiamo il commutatore che appare in (5) mediante un integrale oscillante

$$[M_p, A]\; u(x) = [\chi_p(x), \sqrt{1-\alpha\Delta}\,]\; u(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \widetilde{\iint} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} (\chi_p(x)-\chi_p(y))\sqrt{1+\alpha|\xi|^2}\; u(y)dy\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \widetilde{\iint} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial\chi_p}{\partial x_j}(x+t(y-x))(x_j-y_j))dt\sqrt{1+\alpha|\xi|^2}\, u(y)dy\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \widetilde{\iint} \sum_{j=1}^{n} (-i\frac{\partial}{\partial\xi_j} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \int_0^1 \frac{\partial\chi_p}{\partial x_j}(x+t(y-x))dt)\sqrt{1+\alpha|\xi|^2}\; u(y)dy\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \widetilde{\iint} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} (\int_0^1 \frac{\partial\chi}{\partial x_j} (\frac{x+t(y-x)}{p})dt \frac{\alpha\,\xi_j}{(1+\alpha|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}})\; u(y)\; dy\; d\xi$$

Possiamo ora porre $[M_p, A] = \frac{1}{p} A_p$ ove A_p è l'operatore pseudodifferenziale con simbolo completo in tre variabili

$$a_p(x,y,\xi) = \sum_{j=1}^{n} (\int_0^1 \frac{\partial\chi}{\partial x_j} (\frac{x+t(y-x)}{p})dt \frac{\alpha\,\xi_j}{1+\alpha|\xi|^2})$$

se poniamo $\psi(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/4}$ si ottiene

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_p(x,y,\xi)|+|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta a_p(x,y,\xi)| < c\,\psi(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \quad \forall p \in N$$

e per ogni α, β con $|\alpha| < 2(1+[n/\frac{1}{2}])$ $|\beta| < 2(1+[\frac{n}{2}])$: sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema di Calderon e Vaillancourt [4: th. 10.3] e la costante c è indipendente da $p \in N$; A_p è dunque un operatore limitato in $L^2(R^n)$ ed esiste $C > 0$ tale che $\|A_p\| < C$ $\forall p \in N$. Questo prova che

$$\|[M_p, A]\| \leqslant \frac{1}{p} C \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

Donde la (5).

Una nozione analoga a quella di successione caratteristica può essere introdotta anche nel caso in cui anziché considerare un solo operatore si consideri una famiglia di operatori chiusi; noi considereremo una famiglia del tipo $A(F) = -\Delta + V(F)$ oppure $A(F) = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V(F)$ ($\alpha \in C - [-\infty, 0]$) ove $V(F) \in L^2_{loc}(R^n)$ per ogni $F \in \Omega$ (Ω è un sottinsieme di R^m), $V(F)$ è tale che $A(F)$ sia chiuso, $C_o^\infty(R^n)$ (o $S(R^n)$) sia un core di $A(F)$ e $A(F)^*$ e lo spettro di $A(F)$ sia contenuto in un semipiano indipendente da $F \in \Omega$. Supponiamo che $V(F) \xrightarrow[F \to F_o]{} V_o$ nella topologia di $L^2_{loc}(R^n)$; allora $A(F)$ tende ad $A_o = -\Delta + V_o$ (oppure $A_o = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V_o$) in senso forte generalizzato per $F \to F_o$ [13: ch VIII th. 1.5]; indichiamo con Δ_b il dominio di limitatezza della famiglia $A(F)$ $F \in \Omega$ [13: ch VIII § 1.1]. Allora vale il seguente

<u>Lemma II.1</u>. Sia $z \in C$ tale che $z \notin \sigma_{ess}(A(F))$ per F vicino a F_o. Se $z \notin \sigma_p(A_o)$ vale la seguente alternativa

o i) $z \in \Delta_b$

oppure (ii) esistono due successioni $(F_p)_{p \in N}$ in Ω e

$(u_p)_{p \in N}$ in $C_o^\infty(R^n)$ (o in $S(R^n)$) tali che

$$F_p \xrightarrow[p \to \infty]{} F_o, \quad u_p \in D(A(F_p)) \text{ e } \|u_p\| = 1 \quad \forall p \in N,$$

$$u_p \xrightarrow[p \to \infty]{w} 0 \text{ e } \|(A(F_p) - z)\, u_p\| \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$$

Non riportiamo la dimostrazione di tale lemma perché di carattere elementare [17: lemma 5.1] .

<u>Teorema II.3</u> (di Hunziker e Vock)

Se $A(F)$ $F \in \Omega$ è una famiglia di operatori che soddisfa le ipotesi del lemma precedente ed inoltre esiste una costante $C > 0$ tale che

(6) $\qquad \|(1-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\| \leqslant c \; \|A(F)\,u\| \qquad \forall u \in C_0^\infty(R^3) \quad \forall F \in \Omega,$

allora l'alternativa (ii) del lemma precedente vale con una successione $(u_p)_{p\in N}$ tale che $u_p(x) = 0$ se $|x| \leqslant p \quad \forall p \in N$.

Traccia della dimostrazione. Siano $(u_p)_{p\in N}$ ed $(F_p)_{p\in N}$ le due successioni la cui esistenza è assicurata da (ii) del precedente lemma. Proviamo che la successione

$$v_m = \frac{M_m\, u_{p(m)}}{\|M_m\, u_{p(m)}\|} \qquad m \in N$$

e la successione $(F_{p(m)})_{m\in N}$ soddisfano ancora le condizioni di (ii) purché $p(m)$ sia sufficientemente grande $\forall\, m \in N$. Da (6) segue che la successione $(1-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_p \quad p \in N$ è limitata e quindi come nella prima parte del teorema II.2 si trae che $\chi_m\, u_p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \;\; \forall m \in N$ e quindi

$$\|M_m\, u_{p(m)}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

purché $p(m)$ sia sufficientemente grande $\forall\, m \in N$.

D'altra parte

$$\|(A(F_{p(m)}) - z)\, v_m\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\|M_m\, u_{p(m)}\|} \left(\|M_m (A(F_{p(m)}) - z)\, u_{p(m)}\| + \|[M_m, A(F_{p(m)})]\, u_{p(m)}\|\right)$$

Il primo addendo tende evidentemente a zero mentre il commutatore

$$[M_m, A(F_{p(m)})] = [\chi_m, -\Delta]$$

si tratta come nel teorema II.2. Nel caso invece in cui

$A(F) = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V(F)$ si ha

$$[M_m, A(F_{p(m)})] = [\chi_m, \sqrt{1 - \alpha\Delta}]$$

e questo si tratta come (5) dimostrando che è un operatore limitato in $L^2(R^n)$ che tende a zero in norma quando $m \to +\infty$.

Utilizziamo il risultato precedente per studiare la stabilità degli autovalori isolati e di molteplicità finita dell'operatore A_o. Per la definizione di autovalore stabile rimandiamo alle condizioni I) e II) dell'introduzione [cfr. 13: ch VIII § 1.4]. Se $A(F)$ $F \in \Omega$ è una famiglia di operatori che soddisfano le condizioni del teorema precedente, poniamo ($S(\rho)$ indica la sfera di raggio ρ)

$$d_n(\lambda,F) = \inf \{\|(\lambda - A(F))u\| \,;\, u \in D(A(F)),\ \|u\| = 1,\ \text{supp}\, u \cap S(n) = \emptyset\}$$

Teorema II.4 (di stabilità di Hunziker e Vock [cfr. 17 th. 1.1])

Sia $A(F)$ $F \in \Omega$ una famiglia di operatori che soddisfa le condizioni del teorema II.3. Sia $\lambda \in C$ tale che esistano $n_o \in N$ $\delta > 0$ ed un intorno W di F_o in Ω tali che

I) $\text{dist}\,(\lambda, \sigma_{ess}(A(F))) \geqslant \delta$

II) $d_n(\lambda, F) > \delta$

$\forall\ n \geqslant n_o$ $\forall\ F \in W$. Allora vale la seguente alternativa

o (i) $\lambda \notin \sigma_p(A_o)$ e allora $\lambda \in \Delta_b$

oppure (ii) $\lambda \in \sigma_p(A_o)$ e allora λ è un autovalore stabile per la famiglia $A(F)$ quando $F \to F_o$.

Nota. Nel seguito riportiamo la dimostrazione per il caso

$A(F) = -\Delta + V(F)$ osservando che nel caso $A(F) = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V(F)$ l'unica modifica necessaria è quella da apportare alla valutazione del termine $\| [A(F_m), M_n] v_m \|$ che compare nell'espressione contrassegnata da (*) che si maggiora in questo caso con $\| [\sqrt{1 - \alpha\Delta}, \chi_n] \|$, quantità che tende a zero per $n \to +\infty$ in virtù della dimostrazione del teorema II.2.

Dimostrazione. (i) Se per assurdo $\lambda \notin \sigma_p(A_o)$ e $\lambda \notin \Delta_b$, allora è verificata la seconda alternativa del teorema II.3 e questo contraddice l'ipotesi II).

(ii) Se $\lambda \in \sigma_p(A_o)$ allora esiste $\eta > 0$ tale che se $\eta > |z-\lambda| > 0$ risulta $z \notin \sigma_p(A_o)$, $z \notin \sigma_{ess}(A(F))$ e

(7) $\qquad d_n(z, F) \geqslant \delta/2 \qquad - \forall n > n_o \qquad \forall F \in U,$

inoltre per la parte (i) si ha che $z \in \Delta_s$: vale dunque la condizione I) della definizione (cfr. p. 3). Supponiamo per assurdo che non valga la condizione II), allora esistono due successioni $(F_m)_{m \in N}$ in Ω e $(u_m)_{m \in N}$ in H tali che $\| u_m \| = 1 \quad \forall m \in N$ e

$$P(F_m)\, u_m = u_m \qquad \text{mentre} \qquad P_o\, u_m = 0 \qquad \forall m \in N.$$

Al più passando ad una sottosuccessione si può supporre che $u_m \xrightarrow[m \to \infty]{w} u$; d'altra parte da II) segue che

$$u_m = P(F_m)\, u_m \xrightarrow{w} P_o u \qquad e \qquad 0 = P_o\, u_m \xrightarrow{w} P_o u$$

Di qui segue che $u = P_o\, u = 0$. Se in II) fissiamo r tale che $d_n(z, F_m) \geqslant d_n(\lambda, F_m) - r > \delta/2$ se $|z - \lambda| = r$ ed m ed n sono sufficientemente grandi e poniamo $v_m(z) = (z - A(F_m))^{-1}\, u_m$ da (7) si ottiene

(*) $\qquad \delta/2 \| M_m v_m \| \leqslant \| (A(F_m)-z) M_n\, v_m \| \leqslant \| M_n\, u_m \| + \| [A(F_m), M_n]\, v_m \|$

esaminiamo l'ultimo addendo tenendo presente la (5)

$$\| [A(F_m), M_n] v_m \| = \| [-\Delta, \chi_n] v_m \| <$$

$$< c \frac{1}{n} \| \nabla(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \| \| (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}(z-A(F_m)) \| \| u_m \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

uniformemente rispetto ad m e z $|z - \lambda| = r$. Applicando l'operatore $\delta/2\, M_n$ al vettore $u_m = P(F_m)\, u_m = (2\pi\, i)^{-1} \int_{|z-\lambda|=r} v_m(z)dz$ si ottiene

$$\delta/2 \| M_n u_m \| \leqslant (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda|=r} \| M_n u_m \| dz + (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda|=r} \| [-\Delta, M_n]\, v_m(z) \| dz$$

Poiché il secondo addendo del secondo membro della precedente disuguaglianza tende a zero per $n \to +\infty$ uniformemente rispetto ad m, dall'essere $r < \delta/2$ segue subito

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \limsup_{m \to \infty} \| M_n u_m \| = 0$$

D'altra parte per la parte (i) della dimostrazione risulta che $A(F)\, P(F)$ è un operatore limitato in un intorno di F_0, dunque $A(F_m)u_m = A(F_m)\, P(F_m)\, u_m$ $m \in N$ è una successione limitata e quindi per (5) risulta limitata anche la successione $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}\, u_m$ $m \in N$, per la compattezza dell'operatore $\chi(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}$ si ha pertanto

$$\| \chi_n u_m \| = \| \chi_n (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} (1-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_m \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \qquad \forall n \in N$$

questo implica che $\lim_{m\to\infty} \| M_n u_m \| = 1$ $\forall n \in N$ e ciò contraddice (8).

Osservazione. Il teorema precedente consente di provare il teorema I.5 senza far ricorso alla compattezza di $\frac{z}{r}$ rispetto a $-\Delta$. Poniamo infatti $A(F) = -\Delta + e^{3\theta} F x_1 - e^{\theta} \frac{z}{r} = e^{2\theta} H(F, \theta)$ ed osserviamo che per il teorema I.3 e la stima (1) si ha subito che $A(F)$ $F > 0$ soddisfa le ipotesi del teorema II.3 mentre $\forall \lambda \in C$ $\text{dist}(\lambda, \sigma_{ess}(A(F))) = +\infty$ $\forall F > 0$; per poter applicare il teorema II.4 è sufficiente dimostrare

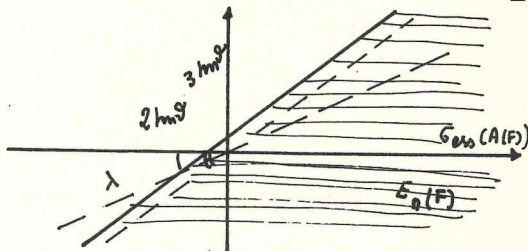
che se λ è un autovalore di $H(0, \theta)$ (e quindi $e^{2\theta}\lambda$ è un autovalore di A_0), risulta

$$d_n(e^{2\theta}\lambda, F) > 0 \qquad \forall n > n_0 \qquad \forall F > 0.$$

A tal fine osserviamo che

$$d_n(e^{2\theta}\lambda, F) = \inf \| (e^{2\theta}\lambda - A(F))u \| \geqslant \inf |<(\lambda e^{2\theta} - A(F))u, u>| =$$
$$= \operatorname{dist}(e^{2\theta}\lambda, E_n(F))$$

essendo $E_n(F) = \{< A(F)u, u >;\ u \in D(A(F)), \| u \| = 1, \operatorname{supp} u \cap S(n) = \emptyset\}$. Poiché $E_n(F) \subseteq \{<-\Delta u, u>;\ u \in D(A(F))\ldots\} + \{e^{3\theta} F < x_1 u, u >\ldots\} + \{e^{\theta} z < \frac{1}{r} u, u >;\ u\ldots\}$ e gli autovalori di $H(0, \theta)$ sono contenuti nel l'asse reale negativo si ottiene subito che

$$d_n(\lambda, F) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \theta)$$

Osserviamo infine che il presente ragionamento non permette di provare la stabilità di eventuali autovalori di $H(0, \theta)$ con parte reale positiva che potrebbero presentarsi quando si sostituisca a $-\frac{z}{r}$ un potenziale più generale.

Per quanto riguarda i risultati di Hunziker e Vock nella loro forma generale si rimanda direttamente a [17: th. 5.5].

III. RISONANZE DELL'OPERATORE $\sqrt{1-\Delta} + Fx_1 - \frac{z}{r}$

Anche in questo caso conviene trattare $-\frac{z}{r}$ come perturbazione dell'operatore $H_0(F) = \sqrt{1-\Delta} + Fx_1$. Si può dimostrare il

Teorema III.1

L'operatore $H_0(F)$ è essenzialmente autoaggiunto su $C_0^\infty(R^3)$. Se $F > 0$ $\sigma(\overline{H}_0(F)) = R$.

Come nel caso precedente poniamo

$$H_0(F, \theta) = U(\theta)\, H_0(F)\, U(\theta)^{-1} \qquad D(H_0(F, \theta)) = S(R^n)\ \theta \in R.$$

Tale famiglia di operatori può essere definita anche per $\theta \in U$, essendo $U = \{\theta \in C;\ |\theta| < \delta,\ |\arg\theta - \pi/2| < \delta\}$; in quest'ultimo caso le sue proprietà sono date dal

Teorema III.2

Esiste $\delta > 0$ tale che se $\theta \in U$

a) il range numerico di $H_0(F, \theta)$ è contenuto nel semipiano

$$\Sigma = \{z \in C;\ \arg(z-1) \in [\, -\pi + \mathrm{Im}\,\theta,\ \mathrm{Im}\,\theta]\};$$

b) la sua chiusura è un operatore m- settoriale che indicheremo con $\overline{H}_0(F, \theta)$;

c) $D(\overline{H}_0(F, \theta)) = D(\sqrt{1-\Delta}) \cap D(x_1)$.

Dimostrazione. Poiché l'operatore $\sqrt{1 - e^{-2\theta}\Delta}$ è normale, risulta [9: probl. 117] $W(\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta}) = \overline{co}(\sigma_{ess}(\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta}))$ ove $\overline{co}(A)$ indica la chiusura dell'involucro convesso di A; d'altra parte utilizzando la trasformata di Fourier [18] si ottiene che $\sigma_{ess}(\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta}) = \{\sqrt{1+e^{-2\theta}t};\ t \quad R^+ \cup \{0\}\}$ e quindi

$$W(H_0(F, \theta)) \subseteq W(\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta}) + W(e^{\theta} x_1) \subseteq \Sigma.$$

Per quanto riguarda il dominio di $\overline{H}_0(F, \theta)$ si può provare che esistono tre costanti positive a, b, c, tali che

$$(9) \qquad \| H_0(F, \theta)u \|^2 \geqslant a \| \sqrt{1-\Delta}\, u \|^2 + b \| x_1 u \|^2 - c \| u \|^2 \quad \forall u \in S(R^3).$$

Si procede come nella dimostrazione di (1) osservando che

$$\| (\sqrt{1-\Delta} + F e^{\theta} x_1)u \|^2 \geqslant \| \sqrt{1-\Delta}\, u \|^2 + F^2 |e^{\theta}|^2 \| x_1 u \|^2 +$$

$$+ F \operatorname{Re} e^{\theta} < (\sqrt{1-\Delta}\, x_1 + x_1 \sqrt{1-\Delta})u, u > + F \operatorname{Im} e^{\theta} < [\sqrt{1-\Delta}, x_1] u, u >$$

$\forall u \in S(R^3)$. Poiché $F[x_1, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}] F^{-1} = [\sqrt{1 + |\xi|^2}, - i \frac{\partial}{\partial \xi_1}] =$

$= - i \xi_1 (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}$ è un operatore limitato e poiché

$$\|(1-e^{2\theta}\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}} u \| \leqslant \|(1-e^{2\theta}\Delta)^{\frac{1}{2}}(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}}-1\| \, \|(1-\Delta)^{\frac{1}{2}}u \| < \varepsilon \|\sqrt{1-\Delta}\, u \|$$

se θ è sufficientemente vicino a zero, la disuguaglianza (9) è provata.

Per provare che $\overline{H}_0(F, \theta)$ è m-settoriale è sufficiente provare che se $z \in C - \Sigma$ allora $z - H_0(F, \theta)$ ha codominio denso. Siano dunque $f \in C_0^{\infty}(R^3)$ ed $\varepsilon > 0$; dimostriamo che esiste $g \in C_0^{\infty}(R^3)$ tale che

$$(10) \qquad \|(z - H_0(F, \theta))\, g - f \| < \varepsilon .$$

Utilizziamo un adattamento di [17: th. 6.1 (iii)] ed osserviamo anzitutto che se $\chi \in C_0^{\infty}(R^3)$ con $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, l'operatore di moltiplicazione $Fe^{\theta} x_1 \chi(x)$ è limitato in $L^2(R^3)$; consideriamo le forme

$$t[u] = < \sqrt{1 - e^{-2\theta}\Delta}\, u, u > \qquad D(t) = W^{\frac{1}{2}}(R^3)$$

$$a[u] = < Fe^{\theta} x_1 \chi(x)u, u > \qquad D(a) = L^2(R^3) ;$$

per esse valgono le ipotesi di [13: ch VI th. 3.4] e dunque t + a è una forma strettamente settoriale chiusa. Poiché evidentemente l'operatore $A_\chi = \sqrt{1 - e^{-2\theta}}\, \Delta + F\, e^{\theta}\, x_1\, \chi(x)$ $D(A_\chi) = W^1(R^3)$ è l'operatore associato alla forma t + a [13: ch. VI § 2.1] esso è strettamente m-settoriale ed il suo range numerico è contenuto in Σ; in particolare [13: ch. V th. 3.2]

$$(11) \qquad \|(z - A_\chi)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Sigma)} \qquad \forall z \in C - \Sigma.$$

Poiché $C_0^\infty(R^3)$ è un core di $\sqrt{1 - e^{-2\theta}\, \Delta}$, tale è anche per A_χ [13: ch. IV th. 1.1]; possiamo pertanto determinare $h_\chi \in C_0^\infty(R^3)$ tale che

$$(12) \qquad \|(z - A_\chi)h_\chi - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da (11) e (12) si ottiene

$$(13) \qquad \|h_\chi\| < (\|f\| + \frac{\varepsilon}{2})\, (\operatorname{dist}(z, \Sigma))^{-1} = d$$

ove d è indipendente da χ ed h_χ.

Supponiamo di poter scegliere $\Lambda \in C_0^\infty(R^3)$ con $0 \leqslant \Lambda \leqslant 1$, $\Lambda f = f$ e

$$(14) \qquad \|[\sqrt{1 - e^{-2\theta}\, \Delta}, \Lambda]\| < \frac{\varepsilon}{2d} ;$$

scegliamo allora χ tale che $\chi\Lambda = \Lambda$ e da (12) otteniamo

$$\frac{\varepsilon}{2} > \|\Lambda\, (z-A_\chi)h_\chi - f\| = \|(z-Fe^{\theta}x_1)\Lambda\, h_\chi - \Lambda\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta}\, h_\chi - f\| \geqslant$$

$$\geqslant \|(z-H_0(F,\theta))\Lambda\, h_\chi - f\| - \|[\sqrt{1 - e^{-2\theta}\, \Delta}, \Lambda]\|\, \|h_\chi\|$$

Da quest'ultima, da (13) e (14) si conclude che la funzione $g = \Lambda\, h_\chi$ soddisfa (10).

Proviamo infine che (14) può essere soddisfatta esprimendo il commutatore che vi compare mediante un integrale oscillante.

$$[\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta},\Lambda]\ u(x) = (2\pi)^{-3} \iint e^{i<x-y,\xi>}\ (\Lambda(y)-\Lambda(x))(1+e^{-2\theta}|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}u(y)dy\ d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-3} \iint e^{i<x-y,\xi>} \int_0^1 \sum_{j=1}^{3} (\frac{\partial\Lambda}{\partial x_j}(x+t(y-x))(x_j-y_j)dt\ (1+e^{-2\theta}|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}u(y)dyd\xi =$$

$$= (2\pi)^{-3} \sum_{j=1}^{3} \iint i \frac{\partial}{\partial\xi_j} e^{i<x-y,\xi>} \int_0^1 \frac{\partial\Lambda}{\partial x_j}(x+t(y-x))dt\ (1+e^{-2\theta}|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}u(y)dyd\xi =$$

$$= (2\pi)^{-3} \iint e^{i<x-y,\xi>} \sum_{j=1}^{3} (\int_0^1 \frac{\partial\Lambda}{\partial x_j}(x+t(y-x))dt \frac{-i\,e^{-2\theta}\xi_j}{(1+e^{-2\theta}|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}})u(y)dyd\xi$$

Dunque il commutatore in questione è un operatore pseudodifferenziale con simbolo

$$a(x,y,\xi) = \sum_{j=1}^{3} (\int_0^1 \frac{\partial\Lambda}{\partial x_j}(x+t(y-x))dt \frac{-i\,e^{-2\theta}\xi_j}{(1+e^{-2\theta}|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}})$$

Se poniamo $\psi(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/4}$ e fissiamo $\eta > 0$ si ottiene

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,y,\xi)| + |\partial_y^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x,y,\xi)| < \eta\ \psi(\xi)^{|\alpha|-|\beta|}$$

per ogni α, β tali che $|\alpha| \leqslant 2\ (1+[\frac{3}{\frac{1}{2}}])$, $|\beta| \leqslant 2\ (1+[\frac{3}{2}])$, purché $\sup_{R^3} |D^{\alpha+e_j}\Lambda|$ sia minore di un'opportuna costante (dipendente solo da η) per ogni α e j con $|\alpha| \leqslant 14$, $j = 1,2,3$. Da qui segue l'asserto giacché $\|[\sqrt{1-e^{-2\theta}\Delta},\ \Lambda]\| \to 0$ quando $\eta \to 0$ in virtù del teorema di Calderon e Vaillancourt [4: th. 10.3].

Evidentemente la famiglia $\overline{H}_0(F,\theta)$ $\theta \in U$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato [13: ch VII § 2.1]; anche in questo caso non è possi_bile un prolungamento all'asse reale perché manca la costanza del dominio.

Per introdurre la perturbazione $-\frac{z}{r}$ osserviamo anzitutto che es_sa è relativamente limitata rispetto a $\sqrt{1-\Delta}$ [15: ch X § 2]; se $0 < z < \frac{1}{2}$ si può scegliere U in modo tale che essa sia relativamente limitata rispetto ad $\overline{H}_0(F,\theta)$ con bound relativo minore di 1 $\forall\theta \in U$. Con tale scel-ta di z e di U, scelta che nel seguito penseremo fissa, poniamo

$$H(F,\theta) = \overline{H}_o(F,\theta) - e^{-\theta}\frac{z}{r} \qquad D(H(F,\theta)) = D(\overline{H}_o(F,\theta)).$$

adattando opportunamente la prova nota per il caso $-\Delta + Fx_1 - \frac{z}{r}$, si può dimostrare che $H(F, 0)$ è essenzialmente autoaggiunto su $C_o^\infty(R^3)$; sempre in analogia con tale caso il considerare l'operatore $H(F,\theta)$ con θ complesso ci permetterà di ottenere il prolungamento analitico che compare nella definizione di risonanza. Nel caso presente però lo studio dello spettro di $H(F,\theta)$ si presenta assai più difficoltoso sia perché non è ben noto quello di $H_o(F,\theta)$, sia perché $-\frac{z}{r}$ non è relativamente compatto rispetto ad $H_o(F,\theta)$.

Il seguente teorema ci fornisce le informazioni sullo spettro di $H(F,\theta)$ necessarie nel seguito; strumento della prova è il lemma II.1.

Teorema III.3

La famiglia di operatori $H(F,\theta)$ $\theta \in U$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato e

$$\sigma_{ess}(H(F,\theta)) \subseteq \Sigma .$$

Se $\lambda \in \sigma(H(F,\theta))$ e $\lambda \notin \Sigma$, allora λ è un autovalore (isolato e di molteplicità finita) per $H(F,\theta)$ che non dipende da θ insieme alla sua molteplicità.

Dimostrazione. L'olomorfia segue subito dalla costanza del dominio e dall'espressione dell'operatore per definizione [13: ch. VII § 2.1]. Per provare che $\sigma_{ess}(H(F,\theta)) \subseteq \Sigma$ procediamo in due fasi.

I) Proviamo dapprima che $\rho(H(F,\theta)) \neq \emptyset$; procedendo come nel teorema III.2 si può provare che esistono quattro costanti d_1, d_2, d_3, d_4 tali che

$$\|(H(F,\theta)-\lambda)u\|^2 > d_1\|\sqrt{1-\Delta}\, u\|^2 + d_2\|x_1 u\|^2 + (d_4\lambda^2 - d_3)\|u\|^2 \tag{15}$$

$\forall u \in \mathcal{S}(R^3)$ $\lambda < 0$, inoltre la disuguaglianza (15) continua a valere

con le medesime costanti se in luogo di $H(F,\theta)$ si sostituisce $H_t = (1-t)\,\overline{H}_o(F,\theta) + t\,H(F,\theta)$ $t \in [0.1]$; se si sceglie $\lambda \in R^-$ tale che $d_4\lambda^2 - d_3 > 0$, si trova che H_1 è un isomorfismo da $D(\overline{H}_o(F,\theta))$ dotato della norma del grafico, a $L^2(R^3)$ poiché tale è H_o [8: th. 5.2] e quindi $\lambda \in \rho(H(F,\theta))$.

II) Siamo ora in grado di provare che $\sigma_w(H(F,\theta)) \subseteq \Sigma$; questo insieme al fatto che $\rho(H(F,\theta)) \neq \emptyset$ ci assicura che $\sigma_{ess}(H(F,\theta)) \subseteq \Sigma$. Supponiamo per assurdo che $\lambda \in \sigma_w(H(F,\theta))$, $\lambda \in C - \Sigma$; allora per l'osservazione che segue il teorema II.2 esiste una successione caratteristica $(v_n)_{n\in N}$ tale che $v_n(x) = 0$ se $|x| \leqslant n$; d'altra parte

$$\|(\overline{H}_o(F,\theta)-\lambda)v_n\| \leqslant \|(H(F,\theta)-\lambda)v_n\| + \|\frac{e^{-\theta}z}{r}v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

giacché $\|\frac{e^{-\theta}z}{r}v_n\| \leqslant \frac{z}{n}|e^{-\theta}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; dunque $(v_n)_{n\in N}$ è una successione caratteristica per $\overline{H}_o(F,\theta) - \lambda$ e ciò contraddice il teorema III.2.

Per provare che gli eventuali autovalori isolati e di molteplicità finita di $H(F,\theta)$ $\theta \in U$ contenuti in $C - \Sigma$ sono indipendenti da θ, ragioniamo come nel teorema I.3 ed osserviamo dapprima che se $\phi \in R$ allora

$$H(F,\theta+\phi) = U(\phi)\,H(F,\theta)\,U(\phi)^{-1};$$

gli operatori $H(F,\theta+\phi)$ ed $H(F,\theta)$ sono pertanto unitariamente equivalenti, essi hanno quindi il medesimo spettro ed in particolare gli stessi autovalori in $C - \Sigma$. D'altra parte, per le proprietà delle famiglie olomorfe, tali autovalori sono funzioni analitiche di θ e quindi sono necessariamente costanti $\forall\theta \in U$.

Nuovamente si può ottenere un legame fra gli autovalori di $H(F,\theta)$ e le risonanze di $H(F,0)$ mediante il seguente

Teorema III.4

Sia λ un autovalore di $H(F,\theta)$ contenuto in $C - \Sigma$; allora $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ e λ è una risonanza di $H(F,0)$.

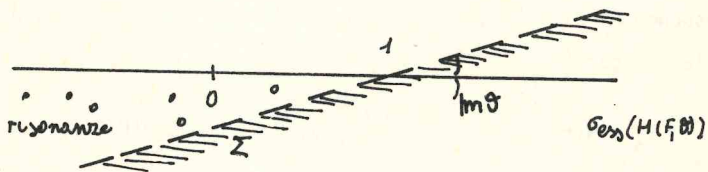
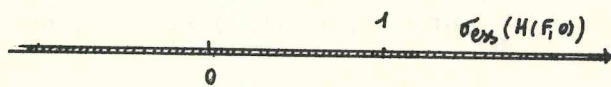
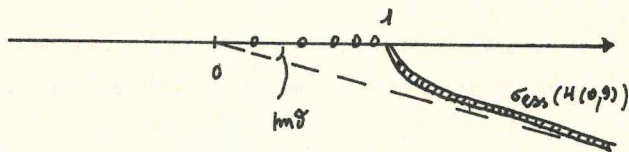
Dimostrazione. Se N è l'insieme introdotto nel teorema I.4 ed $f_\psi(z,\theta), f^\circ_\psi(z,\theta)$ sono le funzioni date dalle espressioni (2) e (3) rispettivamente, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti in quel caso si può provare che $f_\psi(z,\theta)$ ed $f^\circ_\psi(z,\theta)$ sono costanti rispetto a θ mentre come funzioni di z_0 la prima ha un polo per $z = \lambda$ e ψ opportuno mentre la seconda è olomorfa in tutto $C - \Sigma$. Supponiamo di aver provato che $H(F,\theta)$ ed $H(0,\theta)$ tendono rispettivamente ad $H(F,0)$ ed $H(0,0)$ per $\theta \to 0$ $\theta \in U$ in senso forte generalizzato [13: ch VIII § 1.1], allora

$$\begin{aligned} f_\psi(z,\theta) &= R_\psi(z) \\ f^\circ_\psi(z,\theta) &= R^\circ_\psi(z) \end{aligned} \qquad \forall z \in C - \Sigma \qquad \mathrm{Im}\, z > 0$$

Di qui segue che $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ giacché $R_\psi(z)$ è olomorfa per $\mathrm{Im}\, z > 0$, inoltre $f_\psi(z,\theta)$ ed $f^\circ_\psi(z,\theta)$ forniscono i cercati prolungamenti rispettivamente di $R_\psi(z)$ ed $R^\circ_\psi(z)$.

Proviamo dunque che valgono le asserite convergenze forti: dimostreremo che $e^\theta\, H(F,\theta)$ converge fortemente in senso generalizzato ad $H_0(F,0)$ per $\theta \to 0$ $\theta \in U$. Poiché $-\frac{z}{r}$ è relativamente limitato rispetto a $\sqrt{1 - \Delta}$ con bound relativo < 1 esiste $a \in R$ tale che

$$< (\sqrt{1 - \Delta} - \frac{z}{r})u, u > > a \qquad \forall u \in D(H(F,\theta)) \qquad \|u\| = 1$$

D'altra parte $< (e^\theta \sqrt{1 - e^{-2\theta}\Delta} - \sqrt{1 - \Delta})u, u > \in$ $\in \overline{co}\{\sqrt{e^{2\theta} + t} - \sqrt{1 + t})\ t \in [0, +\infty[\ \}$ $\forall u \in D(H(F,\theta))$ $\|u\| = 1$ e quest'ultimo è un insieme limitato in C che indicheremo con A, dunque il range numerico di $e^\theta\, H(F,\theta) = \sqrt{e^{2\theta} - \Delta} + F\, e^{2\theta} x_1 - \frac{z}{r}$ è contenuto nel semipiano

$$P = A + \{e^{2\theta} t;\ t \quad R\} + [\,a,+\infty\,[\ .$$

Ragionando come nel teorema I.4 si ottiene la dimostrazione della convergenza forte di $H(F,\theta)$. Analogamente per $H(0,\theta)$.

Siamo ora in grado di provare che le risonanze di $H(F,0)$ (ossia gli autovalori di $H(F,\theta)$ $\theta \in U$) sono vicini agli autovalori di $H(0,0)$ che è il risultato analogo a quello del teorema I.5.

Teorema III.5

Se Σ indica ancora il semipiano introdotto nel teorema III.2, risulta

$$C - \Sigma \subseteq \Delta_b \cup \sigma_p(H(F,\theta))$$

Se poi λ è un autovalore di $H(0,\theta)$ giacente in $C - \Sigma$ (e quindi è autovalore anche di $H(0,0)$ con la medesima molteplicità), allora λ è stabile per la famiglia $H(F,\theta)$ $F \geqslant 0$.

Dimostrazione. Poiché evidentemente la famiglia $H(F,\theta)$ $F \geqslant 0$ è del tipo $\sqrt{1 - \alpha\,\Delta} + V(F)$, per provare il teorema sarà sufficiente mostrare che valgono le ipotesi I) ed II) del teorema II.4. Se $\lambda \in C - \Sigma$ evidentemente $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma_{ess}(H(F,\theta))) \geqslant \mathrm{dist}(\lambda, \Sigma) > 0$ $\forall F$ in forza del teorema III.3.

Proviamo che $d_n(\lambda, F) \geqslant \delta$ $\forall F > 0$ se n è sufficientemente grande. A tal fine basta osservare che

$$d_n(\lambda, F) \geqslant \mathrm{dist}(\lambda, E_n)$$

essendo $E_n = \{< H(F,\theta)u, u >;\ u \in D(H(F,\theta)),\ \|u\| = 1,\ \mathrm{supp}\ u \cap S(n) = \emptyset\}$.
D'altra parte

$$E_n \subseteq W(\overline{H}_0(F,\theta)) + \{- < \frac{z\, e^{-\theta}}{r} u, u >,\ u \in D(H(F,\theta)),\ \|u\| = 1,$$
$$\mathrm{supp}\ u \cap S(n) = \emptyset\}$$

onde $E_n \subseteq \Sigma + S(\frac{z\,|e^{-\theta}|}{n})$ in virtù del teorema III.2. Di qui II) e quindi il teorema.

BIBLIOGRAFIA

1. Aguilar, J.; Combes, J.M.: Commun Math. Phys. 22, 269-279 (1971).

2. Avron, J.; Herbst, I.W.: Commun Math. Phys. 52, 239-254(1977).

3. Balslev, E.; Combes, J.M.: Commun Math. Phys. 22, 280-294 (1971).

4. Boutet de Monvel, L.: Commun on Pure and App. Math. 27, 585-638 (1974).

5. Enss, V.: Commun Math. Phys. 52, 233-238 (1977).

6. Graffi, S.; Grecchi, V.: Commun, Math. Phys. 62, 83-96 (1978).

7. Graffi, S.; Grecchi, V.: Commun. Math. Phys. 79, 91-109 (1981).

8. Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order. Springer 1977.

9. Halmos, P.: A Hilber Space Problem Book. Springer 1967.

10. Herbst, I.W.: Commun. Math. Phys. 53, 285-294 (1977).

11. Herbst, I.W.: Commun. Math. Phys. 64, 279-298 (1979).

12. Hunziker, W.: Schrödinger Operators with Electric or Magnetic Fields. in Lecture Notes in Physics 119. Springer 1979.

13. Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. Springer 1966.

14. Nardini, F.: Dilation Analyticity in Constant Electric Field; the Two-Body Relativistic Problem (in preparazione).

15. Reed, M.; Simon, B.: Fourier Analysis and Selfadjointness Acad. Press. 1972.

16. Reed, M.; Simon, B.: Analysis of Operators. Acad. Press 1978.

17. Vock, E.; Hunziker, W.: Commun. Math. Phys. 83, 281-302 (1982).

18. Weder, R.A.: Ann. Inst. Henri Poincaré, 20, 211-220 (1974).